This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

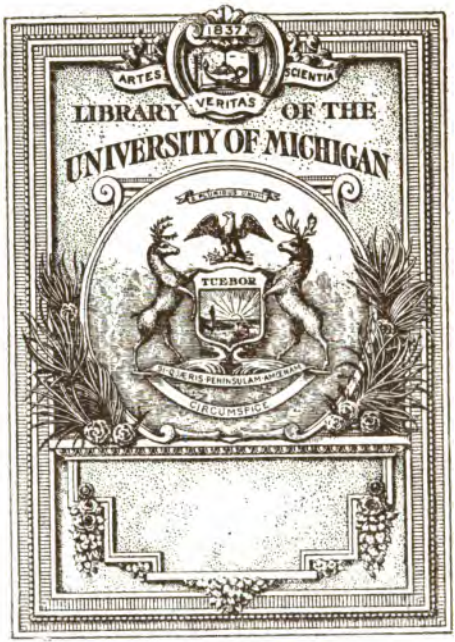
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

Alexander Ziwet
QC
183
.V92

UEBER DEN

EINFLUSS DER KRÜMMUNG DER WAND

AUF DIE

CONSTANTEN DER CAPILLARITÄT BEI BENETZENDEN FLÜSSIGKEITEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

KÖNIGL. ALBERTUS-UNIVERSITÄT ZU KÖNIGSBERG IN PR.

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT UND

AM 26. JULI 1880, VORMITTAGS 12 UHR

ÖFFENTLICH VERTHEIDIGT

Oscar Eduard VON
PAUL VOLKMANN.

OPPONENTEN:

E. KUSCH, STUD. MATH.
A. SCHÜLKE, STUD. MATH.

LEIPZIG,
DRUCK VON METZGER & WITTIG.
1880.

Gift of
Prof. A. Ziwet
Sept, 13 1906

QC
183
.V92

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN

PROFESSOR DR. W. VOIGT

IN DANKBARKEIT

DER VERFASSER.

164529

QC
183
.V92

Inhalt.

Seite

Ueberblick über die hauptsächlichsten Arbeiten, die den Einfluss der Krümmung der Wand auf die Capillaritätsconstanten behandelt haben 7

Theoretische Entwickelung zur Berechnung der Capillaritätsconstante aus der Steighöhe zwischen parallelen Platten und in einem Rohr mit kreisförmigem Querschnitt 8

Die Beobachtungen von Simon 11

Die Beobachtungen von Wilhelmy 13

Meine eigenen Beobachtungen. 17

Der Beobachtungsapparat 18

Untersuchung der Einflüsse auf die Constanz der capillaren Steighöhen an derselben festen Wand 19

Die Beobachtungen mit Klauenfett 27

Die Beobachtungen mit Alkohol 30

Fehlerquellen und Folgerungen 33

Bestimmung der Capillaritätsconstanten aus den Coordinaten eines unter einem gewissen Druck stehenden Tropfen 36

Uebersicht der gefundenen Resultate 40

Die Theorieen der Capillarität, wie sie von Laplace, Poisson, Gauss aufgestellt sind, gehen bekanntlich von der Annahme aus, dass die Molecularkräfte nur in für uns unmessbar kleinen Entfernungen wirken, einer Annahme, die für die mathematische Behandlung einiger Theile der Physik von fundamentaler Bedeutung ist.

Beobachtungen capillarer Erhebungen von benetzenden Flüssigkeiten an ebenen und gekrümmten Wänden von Wertheim und Wilhelmy haben diese Annahme in Zweifel gesetzt. Wertheim[1]) mass die Coordinaten der capillaren Oberfläche an verschiedenen Stellen und bestimmte daraus nach der Guldin'schen Regel das gehobene Flüssigkeitsvolumen; Wilhelmy[2]) mass letzteres direct durch Gewichtsbestimmungen. Die Capillaritätsconstante a^2 ergab sich dann gleich $\frac{2V}{\Pi \cos\omega}$, worin Π die Länge der Contactlinie, ω den Randwinkel, V das gehobene Flüssigkeitsvolumen bedeutet. Endlich hat Quincke[3]) durch Beobachtung der Steighöhe des Wassers zwischen zwei nahen parallelen Glasplatten mit aufgetragenen dünnen Silberkeilen eine Zahl für die Grösse der Molecularwirkungssphäre zu erhalten versucht, indem er für die verschieden erhaltenen Steighöhen eine gleiche Constante a^2 aber verschiedene Randwinkel substituirte. — Andererseits hat Plateau[4]) die Beobachtungen von Bède[5]) dadurch in Uebereinstimmung mit der Theorie

1) Wertheim, Compt. rend. **44.** p. 1022. 1857.
2) Wilhelmy, Pogg. Ann. **119.** p. 199. 1863.
3) Quincke, Pogg. Ann. **137.** p. 402. 1869.
4) Plateau, Bull. de Brux. **19.** (2) p. 470. 1852.
5) Bède, Mém. cour de l'acad. d. Belg. **25.**

gebracht, dass er eine Wandschicht von 0,001 mm annimmt, an der die Flüssigkeit emporsteigt.

Die vorliegende Arbeit beabsichtigt eine Entscheidung herbeizuführen, ob in der That die Krümmung der Wand von Einfluss auf die Constante a^2 ist, wie es Wertheim und Wilhelmy beobachtet haben, und wonach dann die Grösse der Molecularwirkungssphäre einen angebbaren Werth hätte; oder ob die Annahme einer Wandschicht allein ausreicht, die Beobachtungen mit der Theorie in Einklang zu bringen.

Ich stelle zuerst frühere Beobachtungen dieser Aufgabe gegenüber; zunächst die von Simon.[1]) Die Steighöhe des Wassers wurde von ihm zwischen parallelen Platten in sehr verschiedenen Abständen und in einer Anzahl Röhren von sehr verschiedenem Durchmesser bestimmt. Simon bildet dann nur die Producte aus Durchmesser, beziehungsweise Abstand und Steighöhe. Ich werde zunächst die strengeren Formeln aus der Theorie aufstellen und dann die aus den Simon'schen Beobachtungen darnach berechneten Constanten angeben.

Für die Steighöhe zwischen parallelen Platten ergibt die die Differentialgleichung:

$$\frac{2z}{a^2} = \frac{z''}{\sqrt{1+z'^2}^3}$$

die strenge Lösung:

$$\frac{r}{h}k' = \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta} - \int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta\, d\varphi.$$

Hierin ist $k^2 = \frac{2a^2}{2a^2 + h^2}$, $k'^2 = 1 - k^2$, $\Delta^2 = 1 - k^2 \sin^2\varphi$, $2r$ der Abstand der Platten, h die Steighöhe. Berechnet man, $k = \sin\vartheta$ gesetzt, für verschiedene ϑ $\frac{r}{h}$, so erhält man dann umgekehrt daraus für ein gegebenes $\frac{r}{h}$ ϑ und $a^2 = \frac{1}{2}h^2 \operatorname{tg}^2\vartheta$.

In den meisten Fällen werden wir uns mit Vortheil jedoch einer nach Potenzen von $\frac{r}{h}$ entwickelten Form be-

1) Simon, Ann. de chim. et de phys. (3) **32.** p. 5. 1851.

dienen. Entwickeln wir Δ nach Potenzen von k^2, setzen $k^2 = 2\frac{a^2}{h^2}\left(1 - 2\frac{a^2}{h^2} + 4\frac{a^4}{h^4}\ldots\right)$ und in den Gliedern höherer Ordnung für a^2 die angenäherten Werthe, endlich $\varrho = \frac{r}{\cos\omega}$, so bekommen wir mit Vernachlässigung von $\left(\frac{\varrho}{h}\right)^3$ gegen 1:

$$a^2 = 2h\varrho\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(2 - \sin\omega - \frac{\frac{\pi}{2} - \omega}{\cos\omega}\right)\frac{\varrho}{h}\right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{2}\left(1 + \sin\omega + \frac{\frac{\pi}{2} - \omega}{\cos\omega}\left\{1 - 2\sin\omega - \frac{\frac{\pi}{2} - \omega}{\cos\omega}\right\}\right)\frac{\varrho^2}{h^2}\right].$$

Auf diese Formel kommen wir auch direct, ohne von dem geschlossenen Integralausdruck auszugehen. Rechnen wir die z Coordinate von dem tiefsten Punkt der Erhebung aus, so lautet die Differentialgleichung:

$$\frac{2}{a^2}(h + z) = \frac{z''}{\sqrt{1 + z'^2}^3}.$$

Bezeichnen wir den Krümmungsradius an der tiefsten Stelle mit $b = \frac{a^2}{2h}$, so erhalten wir durch successive Annäherung:

$z = b - \sqrt{b^2 - x^2} + \frac{b^3}{a^2}\left(\frac{2}{\cos\varphi} - 2 - \varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)$, worin $\varphi = \arcsin\frac{x}{b}$.

Daraus folgt:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\varrho} - \frac{\varrho}{a^2}\left(2 - \sin\omega - \frac{\frac{\pi}{2} - \omega}{\cos\omega}\right)$$

$$+ 2\frac{\varrho^3}{a^4}\left(1 + \sin\omega + \frac{\frac{\pi}{2} - \omega}{\cos\omega}\left(1 - 2\sin\omega - \frac{\frac{\pi}{2} - \omega}{\cos\omega}\right)\right)$$

und die obige Formel für a^2.

Für ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius r berechnet sich die Steighöhe aus der Differentialgleichung:

$$\frac{2}{a^2}(h + z)\,x\,dx = d\frac{xz'}{\sqrt{1 + z'^2}}.$$

Diese Differentialgleichung ist nur durch Annäherung lösbar. Bezeichnen wir wieder den Krümmungsradius an der tiefsten Stelle mit $b = \frac{a^2}{h}$, setzen $\varrho = \frac{r}{\cos\omega}$, so erhalten wir durch successive Annäherung:

$$z = b - \sqrt{b^2 - x^2} + \tfrac{1}{3}\frac{b^3}{a^2}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2-x^2}} - 1 + 2\log\frac{b+\sqrt{b^2-x^2}}{2b}\right).$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\varrho} - \tfrac{1}{3}\frac{\varrho}{a^2}\left(1 - 2\frac{\sin^2\omega}{1+\sin\omega}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\frac{\varrho^2}{a^4}\left(2\log\frac{2}{1+\sin\omega} - \frac{1-\sin\omega}{1+\sin\omega}\left(1 + 2\frac{\sin^2\omega}{1+\sin\omega}\right)\right),$$

$$a^3 = \varrho h\left[1 + \tfrac{1}{3}\frac{\varrho}{h}\left(1 - 2\frac{\sin^2\omega}{1+\sin\omega}\right)\right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{3}\frac{\varrho^2}{h^2}\left(2\log\frac{2}{1+\sin\omega} - \frac{1-\sin\omega}{1+\sin\omega}\left(1 + 2\frac{\sin^2\omega}{1+\sin\omega}\right)\right)\right].$$

Diese Formel gibt für $\omega = 0$ schon Poisson[1]) an. Er setzt in zweiter Annäherung statt $z = b - \sqrt{b^2 - x^2} + \delta$, $z = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - x^2} + \delta$; es bestimmt sich dann:

$$\delta = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\gamma} + \tfrac{1}{3}\frac{\gamma}{a^2}\right)\left(\frac{\gamma^3}{\sqrt{\gamma^2-x^2}} - \gamma^2\right) + \frac{2\gamma^3}{3a^2}\log\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-x^3}}{2\gamma}.$$

Poisson verfügt dann p. 110 über γ in der Weise, dass $\frac{1}{b} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{3}\frac{\gamma}{a^2}$, also $\gamma = b - \frac{1}{3}\frac{b}{a^2}$ wird.

Poisson will durch die Einführung von γ vermeiden, dass δ für $x = b$ unendlich gross wird. Es wird aber nun für $x = b$ der Ausdruck unter dem log complex, indem $\gamma^2 - x^2 = b^2\left(1 - \frac{2}{3}\frac{b^2}{a^2}\right) - x^2$ wird — allerdings ist das imaginäre Glied von höherer Ordnung. Es ist zu der Poisson'schen Ableitung der Formel zu bemerken, dass ein Unendlichwerden von δ für $x = b$ der Betrachtung nicht hinderlich ist. Denn 1) ist $b = \varrho + \frac{1}{3}\frac{\varrho^3}{a^2}$, mithin liegt der Werth $x = b$ ausserhalb des Stückes der Curve,

1) Poisson, Nouvelle théorie de l'action capillaire. 1831.

die überhaupt in Betracht kommt; 2) erscheint bei der Berechnung der Steighöhe δ nur unter der Form $\int \delta . x\,dx$, ein Ausdruck, der selbst für $x = b$ ein Unendlichwerden ausschliesst. — Die directe Ableitung, ohne Benutzung von γ, liefert schneller die einfachste Form des Ausdrucks.

Sowohl die Formeln für parallele Platten, wie für Röhren stellen sich also unter der Form dar:

$$a^2 = \varepsilon \varrho h \left(1 + \alpha \frac{\varrho}{h} - \beta \frac{\varrho^2}{h^2}\right).$$

Es drückt sich dann der Einfluss von ϱ und h auf a^2 durch die Formeln aus:

$$\delta a^2 = \varepsilon h \left(1 + 2\alpha \frac{\varrho}{h} - 3\beta \frac{\varrho^2}{h^2}\right) \delta \varrho, \quad \delta a^2 = \varepsilon \varrho \left(1 + \beta \frac{\varrho^2}{h^2}\right) \delta h.$$

Ebenso können wir den Einfluss einer Aenderung des Randwinkels ausdrücken. Beschränken wir uns dabei auf das erste Glied:

$$\delta a^2 = a^2 \operatorname{tg} \omega\, \delta \omega.$$

Endlich wollen wir noch die obigen Hauptformeln auf den Fall, dass der Randwinkel $\omega = 0$ ist, anwenden. Es ist dann für parallele Platten:

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{k'} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta\, d\varphi \right\}, \quad a^2 = 2rh \left(1 + 0{,}2146 \frac{r}{h} - 0{,}052 \frac{r^2}{h^2}\right),$$

für Röhren mit kreisförmigem Querschnitt:

$$a^2 = rh \left(1 + \tfrac{1}{3} \frac{r}{h} - 0{,}1288 \frac{r^2}{h^2}\right).$$

Ich theile nun die aus den Simon'schen Beobachtungen unter Zugrundelegung des Randwinkels $w = 0$ berechneten Constanten a^2 und ihre Aenderungen δa^2 bei gegebenem $\delta \varrho$ mit. Ich lasse die ersten von Simon bei grossem Abstand, beziehungsweise Durchmesser, angestellten Beobachtungen als für die Berechnung ungeeignet fort. Die Theorie fordert, dass $r < h$; zudem übt ein geringer Beobachtungsfehler der Steighöhe hier einen grossen Einfluss auf die Constante a^2 aus.

Parallele Platten.

$2r$	h	a^2	δa^2
mm	mm		bei $\delta\varrho$ = 0,01 mm
2,09	4,23	9,29	0,10
1,94	4,68	9,46	0,10
1,26	7,42	9,52	0,15
1,084	8,50	9,34	0,17
1,040	9,07	9,55	0,18
1,000	9,47	9,57	0,19
0,518	19,13	10,03	0,38
0,500	20,00	10,03	0,40
0,404	25,00	10,12	0,50
0,272	37,86	10,31	0,76
0,268	38,42	10,31	0,77
0,250	41,24	10,32	0,82
0,220	46,90	10,33	0,94
0,194	53,20	10,33	1,06
0,158	65,38	10,33	1,31
0,140	73,78	10,34	1,48

Röhren.

$2r$	h	a^2	δa^2
mm	mm		bei $\delta\varrho$ = 0,01 mm
3,6	7,02	13,60	0,07
3,4	7,70	13,97	0,08
2,2	12,8	14,47	0,13
1,25	24,0	15,13	0,24
0,605	53,6	16,25	0,54
0,57	55,6	15,88	0,56
0,42	76,0	15,98	0,76
0,36	89	16,03	0,89
0,315	102	16,07	1,02
0,14	233	16,31	2,33
			bei $\delta\varrho$ = 0,001 mm
0,05	663	16,58	0,66
0,031	1080	16,63	1,08
0,028	1289	16,65	1,29
0,025	1333	16,66	1,33
0,020	1693	16,98	1,69
0,012	2884	17,30	2,88
0,0075	4695	18,78	4,70
0,007	5391	18,87	5,39
0,0061	6828	22,25	6,83

Aus den Beobachtungen folgt also eine Zunahme der Capillaritätsconstante mit Wachsen der Steighöhe. Die Formel $\delta a^2 = a^2 \operatorname{tg} \omega \, \delta\omega$ zeigt, dass unter Zugrundelegung eines endlichen Randwinkels die Abweichung von der Theorie nur vergrössert würde. Wir werden also den Randwinkel $\omega = 0$ beibehalten. Schon die Vorbereitung der Röhren und Platten bei Simon — es wurden dieselben vor der Beobachtung vollständig benetzt — lässt die Annahme $\omega = 0$ als wahrscheinlich gelten. Die Beobachtungen an parallelen Platten zeigen ferner, dass die Annahme einer constanten Wandschicht nicht ausreicht, die Werthe a^2 auf einander zu reduciren. Bei diesen ist von einer verschiedenen Krümmung der Wand nicht die Rede, hier müsste die Theorie streng gelten. Wir werden also gezwungen, den Grund der Abweichung in den Beobachtungen selbst zu suchen. In der That, so sinnreich die Simon'sche Betrachtungsmethode ist, die Reibung [1]) der Flüssigkeit an der Wand, welche

1) Nach unseren gewöhnlichen Vorstellungen kann von Reibung nur bei endlichen Bewegungen die Rede sein. Bei unendlich geringer Bewegung, wie sie beim Erreichen der Steighöhe im capillaren Rohr durch

besonders bei geringen Abständen, beziehungsweise Durchmessern, stattfindet und sich in dem Sinne einer Vergrösserung von h äussern muss, kann durch dieselbe nicht eliminirt werden. Ueberdies lassen sich die geringeren Abstände der Platten und Durchmesser der Röhren gar nicht mit der zur Bestimmung der Capillaritätsconstante erforderlichen Genauigkeit messen. Stimmen schon die Beobachtungen von Platten bei Simon nicht überein, so wird man in der Abweichung der Röhrenbeobachtungen von der Theorie gewiss noch nicht den Einfluss der Krümmung der Wand sehen. Auffallen allerdings dürfte, dass selbst bei grösseren Abständen und Durchmessern die Abweichung der a^2 bei Platten und Röhren fünf Einheiten beträgt.

Die Beobachtungen von Bède waren mir leider nicht zugänglich. Insofern Bède nur mit Röhren, nicht mit parallelen Platten beobachtet hat, sind auch seine Beobachtungen für die von mir aufgestellte Frage weniger von Bedeutung.

Die Beobachtungen von Simon und Bède bedurften zur Bestimmung der Capillaritätsconstanten nur zweier Längenmessungen, der Steighöhe und des Durchmessers, und darin liegt ihr Vorzug. Die Wilhelmy'sche Beobachtungsmethode [1]), zu der ich jetzt übergehe, gelangt zur Capillaritätsconstanten durch Längenmessungen, directe und specifische Gewichtsbestimmungen; sie ist also ungleich verwickelter. Eine fehlerhafte Reduction der Gewichte und Längen aufeinander dürfte zwar nur den absoluten Werth der Constanten modificiren, von dem grössten Einfluss dagegen auch auf die relativen Zahlenwerthe bei Platten und Cylindern ist ein Fehler in der specifischen Gewichtsbestimmung und in der Einstellung des Index auf den Strich; Punkte, die man besonders zu berücksichtigen haben wird, wenn man die Widersprüche einiger aus den Wilhelmy'schen Beobachtungen gezogenen Resultate mit anderen zuverlässigen Beobachtungen aufheben will. Wilhelmy

---

Fallen oder Steigen des Meniscus stattfindet, verschwindet jede Reibung. Wo ich im weiteren das Wort Reibung benutze, verstehe ich darunter eine Art Zähigkeit der Flüssigkeit, Adhäsion an der Wand, kurz die Erscheinung, dass im allgemeinen die durch Fallen des Meniscus erreichte Gleichgewichtslage höher, als die durch Steigen erhaltene zu liegen kommt.

1) Wilhelmy, Pogg. Ann. **119.** p. 199. 1863.

findet nämlich eine ziemlich bedeutende messbare Verdichtung einer Flüssigkeit auf der Oberfläche eines festen eingetauchten Körpers. Die Beobachtungen von Röntgen[1]) und Schleiermacher[2]) haben von einer derartigen bedeutenden Verdichtung nichts ergeben. Durch specifische Gewichtsbestimmungen des isländischen Doppelspaths bei verschiedenen Graden der Zerstückelung gelangte ich ebenfalls zu einem negativen Resultate. Es fand sich in allen Fällen auf 0° reducirt 2,711. Würde eine messbare Verdichtung der Flüssigkeit stattfinden, so hätte sich im zerstückelten Zustande das specifische Gewicht grösser herausstellen müssen.

Behandeln wir zuerst den Einfluss eines fehlerhaften specifischen Gewichts. Wilhelmy gibt nicht an, auf welche Art er dasselbe bestimmt hat, es ist jedoch wohl anzunehmen, da es wiederholt beobachtet werden musste, dass er sich eines Aräometers bediente. Bei einem solchen Instrument aber sind innerhalb geringer Intervalle constante Abweichungen zwischen dem abgelesenen und wahren specifischen Gewicht leicht erklärbar. In der That, Wilhelmy gibt p. 191 das specifische Gewicht des wasserfreien Alkohols zu 0,793 bei 17,5° an, während man in den Tabellen sonst dafür 0,793 bei 0° findet, woraus sich 0,782 bei 17,5° berechnet. Ein den Wilhelmy'schen Beobachtungen aber um 0,011 zu gross zu Grunde gelegter Werth des specifischen Gewichts des Alkohols genügt nicht allein den von Wilhelmy gefundenen grossen Einfluss der Krümmung der Wand zu vermindern, sondern auch die von ihm beobachtete Verdichtung der Flüssigkeit an der Oberfläche der Platten und Cylinder zu erklären.

Es gelten die Formeln für:

$$\text{Platten } \alpha = \frac{\Pi - P + k + lhds}{2(l+d)}, \quad \text{Cylinder } \alpha = \frac{\Pi - P + k + \frac{1}{4}d^2\pi hs}{d\pi}.$$

Der Einfluss eines Fehlers des specifischen Gewichts s auf α drückt sich aus für Platten durch:

$$\delta\alpha = \frac{ld}{2(l+d)} h\delta s = \frac{d}{2}\left(1 - \frac{d}{l}\right) h\,\delta s,$$

1) Röntgen, Wied. Ann. **3.** p. 321. 1878.
2) Schleiermacher, Wied. Ann. **8.** p. 52. 1879.

für Cylinder durch:

$$\delta\alpha = \frac{d}{4} h\, \delta s.$$

Aus den von Wilhelmy angegebenen Dimensionen der Platten, Cylinder und sonstigen Angaben lässt sich nun folgende Tabelle entwerfen.

Platten.

Spiegelglas . . .	$\delta\alpha = 0{,}83\, h\, \delta s$,	$\beta = 0{,}01$,	$\alpha = 2{,}55$,	$\alpha' = 2{,}39$,	$\alpha'' = 2{,}32$
Messing	0,99	0,02	2,68	2,49	2,41
Silber	0,80	0,015	2,71	2,56	2,50
Aluminium . . .	0,77	0,01	2,43	2,28	2,22
Zin	0,83	0,01	2,45	2,29	2,22

Cylinder.

Messing . .	I	$\delta\alpha = 3{,}73\, h\, \delta s$,	$\beta = 0{,}03$,	$\alpha = 3{,}41$,	$\alpha' = 2{,}72$,	$\alpha'' = 2{,}42$
	II	3,74	0,03	3,43	2,72	2,42
	III	1,25	0,02	2,70	2,46	2,36
	IV	0,38	0,01	2,43	2,37	2,35
Zink . . .	I	3,76	0,04	4,06	3,33	3,03
	II	1,25	0,02	2,82	2,58	2,38
	III	0,25	0,02	2,43	2,39	2,37
Aluminium	I	0,63	0,01	2,60	2,50	2,45
	II	0,33	0,01	2,49	2,43	2,40
	III	0,18	0,01	2,36	2,33	2,32

Die β bezeichnen die von Wilhelmy angegebenen Verdichtungscoëfficienten, $\alpha = \frac{a^2}{2} s$ die Wilhelmy'schen anders definirten Capillaritätsconstanten, α' die unter Annahme eines um 0,011 zu grossen specifischen Gewichts berechneten Constanten, wobei für h der mittlere Werth, der in den meisten Fällen 17,5 mm beträgt, gesetzt ist. Die Bedeutung der α'' folgt später.

Zunächst erklärt sich nun die von Wilhelmy gefundene scheinbare Verdichtung völlig. Die Entfernung der auf den Platten und Cylindern gezogenen Striche beträgt 5 mm. Setzen wir in den Formeln für $\delta\alpha$ $h = 5$ mm $\delta s = 0{,}011$, so ergibt sich bei den Platten $\delta\alpha = 0{,}04$ bis 0,06. In der That beträgt auch soviel im Mittel die Differenz der Constanten an zwei aufeinander folgenden Strichen derselben Platten, wie man sich aus den auf p. 191 der Abhandlung zusammengestellten Beobachtungen überzeugen kann. $\delta\alpha$ ist am grössten für Messing,

am kleinsten für Aluminium; dementsprechend findet auch Wilhelmy für Messing den grössten, für Aluminium den kleinsten Verdichtungscoëfficienten. — Noch evidenter rechtfertigt sich unsere Annahme, wenn wir analog die an Cylindern gemachten Beobachtungen der Berechnung unterziehen. $\delta\alpha$ wird um so grösser, je grösser der Durchmesser des Cylinders ist; dementsprechend findet Wilhelmy das in sich so widersprechende Resultat, dass die Verdichtungscoëfficienten bei Cylindern mit kleinerem Radius schnell abnehmen, während sie bei Platten meist noch kleiner sind.

Der Einfluss der Krümmung der Wand ist durch die Annahme einer fehlerhaften specifischen Gewichtsbestimmung bedeutend herabgesetzt, wir werden denselben noch mehr vermindern, indem wir den Einfluss einer fehlerhaften Einstellung des Index auf den Strich berücksichtigen. Es drückt sich derselbe aus bei:

$$\text{Platten } \delta\alpha = \frac{d}{2}\left(1 - \frac{d}{l}\right) s\,\delta h, \quad \text{Cylindern } \delta\alpha = \frac{d}{4} s\,\delta h.$$

Die Einstellung des Index geschah mit blossem Auge oder einer Lupe; dabei wird leicht ein Fehler von 0,1 mm unterlaufen können. Die Annahme eines solchen Fehlers genügt nun zunächst, die grossen Abweichungen der bei gleicher Tiefe der Eintauchung erhaltenen Constanten zu erklären. Setzen wir aus unserer Tabelle die für $\frac{d}{2}\left(1 - \frac{d}{l}\right)$ und $\frac{d}{4}$ berechneten Zahlenwerthe in unserer Formel $\delta\alpha$ ein, so erklärt sich, dass die an demselben Strich erhaltenen Constanten bei den grossen Cylindern am meisten differiren $\delta\alpha = 0{,}30$, bei den kleinen Cylindern am wenigsten; die Platten nehmen eine mittlere Stellung ein $\delta\alpha = 0{,}06$.

Aus der von Wilhelmy beschriebenen Art der Einstellung des Index auf den Strich geht ferner hervor, dass die Tiefe des eingetauchten Körpers nie zu gering geschätzt werden konnte. Unter der Annahme einer stets um 0,1 mm zu gross genommenen Tiefe des eingetauchten Körpers habe ich in der Tabelle unter α'' die Constanten weiter reducirt. Der Einfluss der Krümmung ist nun noch mehr herabgesetzt; er würde ganz verschwinden, wollten wir δh noch etwas grösser annehmen.

Ich habe bisher nur die in der ersten Abhandlung von Wilhelmy veröffentlichten Beobachtungen berücksichtigt. Es lassen sich dieselben Fehlerquellen auch in den beiden anderen Abhandlungen [1]) als wahrscheinlich nachweisen. Wilhelmy hat in denselben noch Beobachtungen mit einer dünnen Kupfer- und Platinplatte angeführt; es bestimmt sich bei beiden $\delta\alpha = 0{,}1\ h\delta s$, während bei den früheren Platten im Durchschnitt $\delta\alpha = 0{,}8\ h\delta s$ war. Dementsprechend findet Wilhelmy auch bei Platin und Kupfer die allerkleinsten Verdichtungscoëfficienten.

Gegenüber diesen grossen Fehlerquellen verschwindet der Einfluss, der durch eine angenommene Wandschicht von der Dicke δ auf die Constante α ausgeübt würde. Es berechnet sich dieser Einfluss zu $h\delta s$, sodass $\alpha_1 = \alpha - h.\delta.s$ die reducirte Constante ist; hierin bedeutet h die Steighöhe der Flüssigkeit, die für Platten $= \sqrt{\frac{2\alpha}{s}}$, für Cylinder mit kleiner werdendem Radius geringer wird.

Ich verlasse damit die Wilhelmy'schen Beobachtungen, bei denen ich absichtlich länger verweilt habe, da dieselben als genau und einfach bezeichnet zu werden pflegen, überhaupt bisher ziemlich einflussreich gewesen sind.

Ich komme zu meinen eigenen Beobachtungen. Ich bin zu der Methode von Simon und Bède zurückgekehrt. Die Grenzen in der Wahl der Röhrendurchmesser und Plattenabstände waren mir durch die Bemerkungen gegeben, welche ich bereits bei der Besprechung der Simon'schen Beobachtungen gemacht habe. Sodann bot sich bei meiner Beobachtungsart, indem ich die Steighöhe mit Mikroskop und Fadenkreuz beobachtete, durch die an der äusseren Seite der Platten und Röhren gebildete capillare Oberfläche eine Grenze. Es musste, bezeichnen wir mit a^2 die Capillaritätsconstante, der tiefste Punkt der Steighöhe bei den Platten mehr als a mm über dem Niveau liegen.

1) Wilhelmy, Pogg. Ann. **121.** p. 44. 1864 und **122.** p. 1. 1864.

Der Beobachtungsapparat war nach der Angabe des Hrn. Prof. Voigt in folgender Weise angefertigt: In eine massive Zinkplatte waren gegenüberstehend zwei Säulen aus Messing eingeschroben, auf denen eine auf der oberen Hälfte mit Sorgfalt eben gefeilte Schiene aus Messing befestigt war. Durch Stellschrauben wurde das ganze Statif so gestellt, dass die Schiene sich in horizontaler Lage befand. Auf die Zinkplatte wurde ein am oberen Rande eben abgeschliffener länglicher Glastrog gestellt, der Trog für sich durch Stellschrauben auch in horizontale Lage gebracht und mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, sodass nach Eintauchen der Platten oder Röhren dieselbe nur wenig über den Rand ragte. Die Platten und Röhren wurden in Fassungen auf die Schiene aufgesetzt und durch Visiren nach einem Loth mit Hülfe von Schrauben vertical gestellt. Die Steighöhe wurde, wie schon erwähnt, durch ein Mikroskop abgelesen, das mit Hülfe einer in der Werkstatt des Hrn. Mechanikus Heyde in Dresden angefertigten circa 12 cm langen Mikrometerschraube vertical bewegt werden konnte und noch 0,005 mm abzulesen gestattete; der tiefste Punkt des Meniscus markirte sich recht scharf. Dann wurde die Platte oder das Rohr längs der Schiene fortgeschoben; das Niveau änderte sich dadurch nicht. Durch Spiegelung einer Nadel, die dicht über die Oberfläche vor das Mikroskop gebracht wurde, konnte dann auch scharf auf das Niveau eingestellt werden.

Parallel voneinander abstehende Platten wurden dadurch erhalten, dass drei kleine Stücke desselben Glasstreifens von nahezu gleicher Dicke zwischen zwei Spiegelglasplatten geklemmt wurden. Es konnte dann mit Leichtigkeit der Abstand der Platten an der Contactlinie berechnet werden. Die Röhren waren mit einem Feilstrich als Marke versehen und wurden stets soweit eingetaucht, dass die Contactlinie mit dem Feilstrich zusammenfiel, damit bei wiederholten Beobachtungen die Länge der Contactlinie jedesmal die gleiche sei. Nach Beendigung der Beobachtungen wurde dann das Glasrohr genau an der Stelle des Feilstrichs gebrochen, und sechs um je 30^0 abweichende Durchmesser bestimmt. Das Bild des innern Randes markirte sich recht scharf, wenn das Glasrohr in der Richtung

der Axe durch Spiegelung erleuchtet, der Querschnitt aber durch einen völlig in das Rohr eingeschobenen Papierpfropfen verdunkelt wurde. Beide Bruchstücke wurden zur Bestimmung des Durchmessers benutzt.

Die Dicke der kleinen Glasstücke, sowie die Durchmesser der Röhren wurden mit demselben Mikroskop bis auf circa 0,002 mm genau gemessen. Anfangs benutzte ich ein Fadenkreuz zur Bestimmung der Dicke der Glasstücke, einen daneben aufgespannten einfachen Faden, den ich mit dem Querschnitt des Rohres zur Berührung brachte, zur Bestimmung der Röhrendurchmesser. Indem ich nun zur Reduction der Trommeltheile auf die Einheiten eines Maassstabes nur das Fadenkreuz anwandte, erhielt ich zwischen den Capillaritätsconstanten an Platten und Röhren eine wenn auch nicht bedeutende Abweichung. In der That wurde bei dieser Art der Reduction der Einfluss unberücksichtigt gelassen, den ein Nichtsenkrechtstehen des einfachen Fadens zur Fortbewegungsrichtung der Schraube haben konnte. Ich glaube diese Fehlerquelle dadurch vermieden zu haben, dass ich nur den einfachen Faden anwandte, indem ich mir behufs sicherer Einstellung einen Maassstab mit Doppeltheilstrichen verfertigte. Der einfahe Faden im Mikroskop wurde bei Beginn den Doppeltheilstrichen parallel gestellt.

Ehe ich nun an meine eigentliche Aufgabe gehen konnte, handelte es sich darum, geeignete Flüssigkeiten zu finden; Flüssigkeiten, die bei unter gleichen Umständen angestellten Beobachtungen die grösste Constanz zeigten. Es musste also eine Untersuchung über die Einflüsse auf die Constanz der capillaren Steighöhen an derselben festen Wand überhaupt vorhergehen. Von Einfluss konnte sein die Vorbereitung der Platten und Röhren, die Einwirkung der Luft und die Verdunstung der Flüssigkeit. Nach diesen Gesichtspunkten wurden Wasser, Kalilauge, verdünnte Schwefelsäure, Klauenfett, Alkohol in Aussicht genommen. Kalilauge und verdünnte Schwefelsäure hatte mir Herr Prof. Voigt aus dem Grunde vorgeschlagen, weil sich bei denselben ein Concentrationsgrad finden lässt, bei dem die Flüssigkeit nicht verdunstet. Bei mittlerer Temperatur und mittlerem Feuchtigkeitsgehalt der Luft fand ich einen solchen bei Kalilauge vom specifischen

Gewicht 1,33 (Verhältniss von Wasser zu Kali 1,27), bei verdünnter Schwefelsäure vom specifischen Gewicht 1,31 (Verhältniss von Wasser zu concentrirter englischer Schwefelsäure 2,3).

Ich bespreche nun zunächst den Einfluss der Vorbereitung der Platten und Röhren auf die Constanz. Es wurde anfangs mit vollkommen reinen und trockenen, also nicht vorher benetzten Platten und Röhren beobachtet. Die Steighöhe ergab sich ganz inconstant; der Augenschein lehrte, dass hierbei der Randwinkel einen bedeutenden Werth habe; einer verschiedenen Steighöhe entsprach ein verschiedener Randwinkel. Ein Heben und Senken der Röhren und Platten in der Flüssigkeit lehrte, dass die Reibung der Flüssigkeit an der Wand sehr bedeutend sei und hauptsächlich die Inconstanz der Steighöhe veranlasse. Dieser üble Einfluss der Reibung wurde dadurch beseitigt, dass Platten und Röhren gereinigt einige Zeit vor der Beobachtung in die zu untersuchende Flüssigkeit hineingelegt wurden, sodass dieselben beim Herausnehmen noch vollkommen benetzt waren. Die Flüssigkeit stieg dann nicht unmittelbar an der festen Wand, sondern an einer eigenen Flüssigkeitsschicht empor; die etwaige noch vorhandene Reibung der aufsteigenden Flüssigkeitssäule an ihrer eigenen Schicht, welche sich bei den von mir angewandten Dimensionen der Platten und Röhren als sehr gering herausstellte, konnte dadurch berücksichtigt werden, dass man einmal die Gleichgewichtslage der Kuppe durch Fallen, das andere mal durch Steigen erreichen liess. — Bei den Glas gut benetzenden Flüssigkeiten, wie Alkohol, Klauenfett, Kalilauge genügte vor der Benetzung durch völliges Eintauchen in die Flüssigkeit eine einmalige gründliche Reinigung der Platten und Röhren, die gewöhnlich mit Salpetersäure vorgenommen wurde. Bei den weniger gut benetzenden Flüssigkeiten, wie Wasser, verdünnte Schwefelsäure, konnte die Steighöhe meist nur einmal beobachtet werden; es zeigte sich bei wiederholter Beobachtung der Steighöhe desselben Rohres oder Plattenpaares nicht mehr eine vollständige Benetzung. Um diese herzustellen, mussten die Platten und Röhren von neuem mit Salpetersäure gereinigt werden; das blosse Hineinlegen in die Flüssigkeit genügte nicht. Da kleinere Flächen leichter gut benetzbar zu erhalten sind, indem sie z. B. leichter vor Staub

geschützt werden können, zeigen Röhren auch grössere Constanz als Platten.

Bei einigen Flüssigkeiten scheint es von Einfluss zu sein, wie lange sie in Berührung mit den Platten und Röhren gewesen sind. Ich glaube einen solchen Einfluss z. B. bei Klauenfett bemerkt zu haben. Die Glasplatten waren vorher mit Spiritus gereinigt, dann mit Leinwand abgewischt und 12 Stunden vor der Beobachtung in Klauenfett gelegt. Es ergab sich dann aus einer Reihe von Beobachtungen:

Abstand	Steighöhe	Constante	$\delta(r) = 0{,}001$
$2r = 2{,}223$ mm	$h = 2{,}95$ mm	$a^2 = 7{,}06$	$\delta a^2 = 0{,}007$
1,232	5,69	7,17	0,013

Der wahrscheinliche Fehler in der Beobachtung der Steighöhe bestimmte sich zu $\pm 0{,}003$ mm. Ohne dass die Temperatur sich änderte, zeigte sich während der letzten Beobachtungen ein Anwachsen der Constanten; die Beobachtungen wurden daher unterbrochen; am nächsten Tage ergab sich wieder aus einer Reihe von Beobachtungen:

Abstand	Steighöhe	Constante	$\delta(r) = 0{,}001$
$2r = 2{,}223$ mm	$h = 2{,}99$ mm	$a^2 = 7{,}13$	$\delta a^2 = 0{,}007$
1,666	4,16	7,20	0,009
1,232	5,73	7,21	0,013

Der wahrscheinliche Fehler in der Beobachtung der Steighöhe bestimmte sich bei $h = 2{,}99$ zu $\pm 0{,}002$ mm. Bei den letzten Steighöhen zu $\pm 0{,}005$ mm. An beiden Tagen betrug die Temperatur des Klauenfettes 18—19° C.

Die Constanten, wie sie aus der letzten Beobachtungsreihe berechnet sind, ergeben sich entschieden grösser, als in der ersten Reihe. Für die endgültigen Beobachtungen wurden daher die Platten und Röhren schon einige Tage vorher in die zu untersuchende Flüssigkeit gelegt.

Aus zwei Beobachtungsreihen mit Plattenpaaren an Alkohol glaube ich auch auf den Einfluss einer verschiedenen Vorbereitung der Platten auf die Constanten a^2 schliessen zu müssen. Die Temperatur des Alkohol betrug bei beiden Reihen 9 bis 11° C. Das specifische Gewicht änderte sich von 0,825 bis

0,830 im Laufe einer einzelnen Beobachtungsreihe. An einem Tage beobachtete ich:

Abstand	Steighöhe	Constanten	$\delta(r) = 0{,}001$
$2r = 1{,}232$ mm	$h = 4{,}64$ mm	$a^2 = 5{,}88$	$\delta a^2 = 0{,}001$
0,434	13,60	5,92	0,027

Der wahrscheinliche Fehler in der Beobachtung der Steighöhen bestimmte sich zu $\pm 0{,}01$ mm.

Die nächsten Tage wurde an denselben Platten mit Klauenfett beobachtet. Die Platten wurden dann zur Reinigung in Kalilauge gelegt und mit Wasser abgespült. Diese Reinigung mag nicht so vollständig wie die mit Salpetersäure gewesen sein. Es ergab sich aus je acht Beobachtungen bei denselben Plattenpaaren:

Abstand	Steighöhe	Constanten	$\delta(r) = 0{,}001$
$2r = 1{,}666$ mm	$h = 3{,}38$ mm	$a^2 = 5{,}92$	$\delta a^2 = 0{,}007$
1,232	4,67	5,92	0,010
0,871	6,75	5,96	0,014
0,434	13,74	5,98	0,027

Der wahrscheinliche Fehler in der Beobachtung der Steighöhen betrug auch hier $\pm 0{,}01$ mm. Die Annahme einer Wandschicht von 0,003 mm genügt, diese Constanten auf 5,90 zu reduciren.

Die Constanten in der zweiten Beobachtungsreihe sind grösser, als in der ersten. Bei den endgültigen Beobachtungen wurde dementsprechend die gehörige Sorgfalt darauf verwendet, dass Platten und Röhren in gleicher Weise vorbereitet waren.

Für Klauenfett und Alkohol war durch die bisherigen Maassregeln eine Constanz erreicht, mit der ich in jeder Beziehung zufrieden sein konnte. Von den übrigen Flüssigkeiten konnte ich dies nicht in gleichem Maasse sagen. Es trat bei diesen eine Erscheinung ein, die schon von Frankenheim [1]) und Hagen [2]) beobachtet und angegeben ist. Trotz der sorgfältigsten Reinigung der Platten und Röhren war es mir bei diesen Flüssigkeiten nicht möglich, die Steighöhe auch nur fünf Minuten constant zu erhalten; es trat vielmehr ein sofortiges

1) Frankenheim, Pogg. Ann. **37.** p. 411. 1836.
2) Hagen, Pogg. Ann. **67.** p. 159. 1846.

Fallen der Steighöhe ein, welches sich stundenlang verfolgen liess und besonders bei den Platten auffallend war. Der letzte Umstand liess einen Einfluss der Luft als wahrscheinlich zu, indem bei den Platten die Luft zu der capillar gehobenen Oberfläche einen viel freieren Zutritt, als bei den Röhren hat. Herr Prof. Voigt rieth mir daher, die Flüssigkeiten mit Luft zu sättigen, vielleicht, dass dann eine constante Steighöhe erhalten würde. Ich trieb also mit Hülfe eines Blasebalges während einiger Stunden Luft durch die zu untersuchenden Flüssigkeiten, Wasser, verdünnte Schwefelsäure und Kalilauge, hindurch, und nun erhielt ich allerdings für eine Beobachtung an je einem Rohr und Plattenpaar eine constante Steighöhe.

Die Beobachtungen mit luftgesättigtem destillirtem Wasser waren:

	Plattenpaare.		Röhren.		
	mm	mm	mm	mm	mm
	$2r=1{,}519$	$2r=1{,}138$	$2r=2{,}931$	$2r=2{,}349$	$2r=2{,}131$
0′	$h=8{,}29$	$h=11{,}35$	$h=9{,}31$	$h=11{,}66$	$h=12{,}95$
5′	8,28	11,33	9,17	11,66	12,95
10′	8,28	11,33	9,17	—	—
15′	—	11,33	—	—	—
	$a^2=12{,}82$	13,03	$a^2=14{,}11$	14,14	14,16

Die Gleichgewichtslage der Kuppe wurde in diesen Fällen durch Fallen erreicht; infolge der Reibung waren, wie sich aus den angegebenen Daten ergibt, circa fünf Minuten erforderlich, bis die Gleichgewichtslage eintrat.

War der Sättigungsgrad der Luft von Bedeutung auf die Constanz der Steighöhe, so mussten Beobachtungen mit ausgekochtem Wasser die grösste Inconstanz ergeben. Ich legte also ein Plattenpaar und ein Rohr in kochendes Wasser, welches dann schnell abgekühlt wurde. Gleichzeitig war ich bemüht, dnrch völlig gleiche Vorbereitung des Plattenpaares und des Rohres eine weniger starke Abweichung der Capillaritätsconstanten für Wasser bei Platten und Röhren zu erhalten, als sie bei den obigen Beobachtungen existirt.

Das oben erwähnte beständige Fallen der Steighöhe war in der That bei ausgekochtem Wasser besonders wieder bei

Platten recht stark. Es wurden von fünf zu fünf Minuten folgende Steighöhen beobachtet.

	Plattenpaar.	Rohr.
	$2r = 1{,}519$ mm	$2r = 2{,}353$ mm
0′	$h = 9{,}27$	$h = 12{,}13$
5′	9,21	12,105
10′	9,18	12,09
15′	9,13	12,085
20′	9,09	12,08
25′	9,05	12,075
30′	9,01	12,07

Dasselbe Plattenpaar und Rohr wurde nun von neuem mit Salpetersäure gereinigt und in luftgesättigtes Wasser getaucht. Es wurde nun beobachtet:

	Plattenpaar.	Rohr.
	$2r = 1{,}519$ mm	$2r = 2{,}353$ mm
0′	$h = 9{,}48$	$h = 11{,}985$
5′	9,475	11,975
10′	9,47	11,97
15′	9,47	11,97
	$a^2 = 14{,}63$	$a^2 = 14{,}53$

Mit dieser Uebereinstimmung der Constanten bei Platten und Röhren können wir, zumal nur je eine Beobachtung angestellt wurde, völlig zufrieden sein. Die Temperatur des Wassers betrug 16° C. Ich füge zur Vergleichung noch die von anderen Beobachtern gefundenen Capillaritätsconstanten für Wasser hinzu; allerdings ist bei denselben das Wasser nicht nach meiner Art vorbereitet. Es fanden:

Gay-Lussac . .	$a^2 = 15{,}13$	
Frankenheim [1])	14,84	bei 16,5° C.
Hagen [2])	15,12	
Rodenbeck [3]) . .	14,64	bei 17,5° C.

Der Werth von Rodenbeck stimmt mit dem meinigen recht gut überein.

1) Frankenheim, Pogg. Ann. **37.** p. 413. 1836.
2) Hagen, Abh. d. Berl. Akad. 1845.
3) Beibl. **4.** p. 105. 1880.

Ein ganz analoges Verhalten wie Wasser zeigte verdünnte Schwefelsäure von dem oben angegebenen Concentrationsgrad (specifisches Gewicht 1,31). Mit einem parallelen Plattenpaar habe ich bei Schwefelsäure nur eine Beobachtung gemacht; überdies fand hier nur eine unvollkommene Benetzung der Wand statt, weshalb sich die daraus berechnete Capillaritätsconstante a^2 nicht gut mit den aus den Röhren berechneten Constanten vergleichen lässt. Es ergab sich bei dem Plattenpaar:

$$2r = 1{,}956 \text{ mm}; \quad h = 4{,}11 \text{ mm}; \quad a^2 = 8{,}43$$

Eine gute Benetzung zeigten für die beiden ersten Beobachtungen die Röhren. Es wurde bei jedem Rohr einmal durch Fallen, das andere mal durch Steigen die Gleichgewichtslage der Kuppe erreicht. Die Steighöhen wichen in beiden Fällen mit Ausschluss des engsten Rohres im Mittel um 0,03 mm ab. Die Resultate der Beobachtungen der Steighöhen von verdünnter Schwefelsäure in Capillarröhren sind:

$2r$	h	a^2	δa^2 bei $\delta r = 0{,}01$ mm
2,931 mm	7,45 mm	11,58	0,08
2,349	9,52	11,62	0,10
2,131	10,64	11,70	0,11
1,377	16,865	11,77	0,17
1,006	23,38	11,84	0,23
0,714	33,255	11,91	0,33

Die Annahme einer Wandschicht von 0,01 mm genügt, diese Constanten aufeinander zu reduciren. Zur Vergleichung füge ich noch zwei für verdünnte Schwefelsäure erhaltene Capillaritätsconstanten von Frankenheim[1]) hinzu.

Spec. Gewicht	Temperatur	a^2
1,382	17,5	11,50
1,195	17,5	12,74

Etwas anders als Wasser und verdünnte Schwefelsäure verhielt sich wieder Kalilauge. Wie schon oben erwähnt, benetzt Kalilauge Glas sehr gut, sodass eine einmalige Reinigung der Platten und Röhren ausreichend ist. Von besonderer Ein-

1) Frankenheim, Pogg. Ann. **37.** p. 413. 1836.

wirkung auf die Kalilauge ist jedoch speciell die Kohlensäure in der atmosphärischen Luft. Die Kalilauge wird von der Kohlensäure chemisch afficirt, indem sich kohlensaures Kali bildet. Beiden Lösungen, der von Aetzkali und der von kohlensaurem Kali, kommt aber eine ganz andere Capillaritätsconstante zu. Hierher gehört eine Beobachtung, welche ich mit demselben Rohr von dem Durchmesser $2r = 2{,}131$ mm anstellte. Die Steighöhe der Kalilauge betrug 12,64 mm; es wurde nun eine kurze Zeit Luft durch das Rohr getrieben, die Steighöhe ergab sich jetzt zu 3,65 mm. Jener Steighöhe entspricht die Capillaritätsconstante $a^2 = 13{,}8$, dieser $a^2 = 4{,}2$.

Zu den Beobachtungen wurde nun durch die Kalilauge einige Stunden Luft hindurchgetrieben. Insofern ich keinen Maassstab für den Kohlensäuregehalt der Lösung hatte, bieten die folgenden Beobachtungen nur ein untergeordnetes Interesse. Ueberdies befanden sich Platten und Röhren in verschiedenen Gefässen, durch welche einzeln Kohlensäure hindurchgetrieben war; es werden sich also auch hier nicht die Constanten bei Platten und Röhren direct vergleichen lassen. Aus einer Reihe von Beobachtungen an den Platten ergab sich:

$2r$	h	a^2	δa^2 bei $\delta \varrho = 0{,}01$ mm
1,519 mm	2,955 mm	4,72	0,065
1,138	4,035	4,73	0,086

Aus einer Reihe von Beobachtungen an Röhren ergab sich:

$2r$	h	a^2	δa^2 bei $\delta r = 0{,}01$ mm
2,931 mm	2,47 mm	4,17	0,031
2,349	3,21	4,17	0,038
2,131	3,66	4,24	0,043
1,377	5,94	4,24	0,064

Von weiterer Einwirkung auf die Constanz der capillaren Steighöhen konnte noch die Verdunstung sein. Allein die bisher angeführten Beobachtungen liessen die Verdunstung als indifferent der Constanz gegenüber erscheinen. Klauenfett und

Alkohol, also zwei in Bezug auf die Verdunstung sehr verschiedene Flüssigkeiten, zeigten ohne grosse Vorbereitung Constanz, während Wasser einerseits, verdünnte Schwefelsäure und Kalilauge andererseits erst nach einigen Vorbereitungen dieselbe zeigten. Ist die Verdunstung ziemlich bedeutend, wie bei Alkohol, so lässt sich zwar die Steighöhe nicht mit der Sicherheit beobachten, wie bei nicht verdunstenden Flüssigkeiten, darum kann aber noch nicht von einer Inconstanz der Steighöhe die Rede sein.

Diese Untersuchungen über die Constanz der Steighöhe an derselben festen Wand zusammengefasst haben also das Resultat ergeben: Die gute Benetzbarkeit der Wand von der Flüssigkeit ist in erster Linie von Einfluss auf die Constanz; selbst die Vorbereitung der Platten und Röhren, die Reinigungsart derselben ist nicht ohne Einwirkung. Bei wässerigen Flüssigkeiten spielt der Sättigungsgrad der Luft eine Rolle; von keinem Einfluss auf die Constanz ist die Verdunstung der Flüssigkeit.

Nach diesen Vorbereitungen komme ich zu meiner eigentlichen Aufgabe, zu untersuchen, ob in der That die Krümmung der Wand von Einfluss auf die Capillaritätsconstante a^2 ist, oder ob die Annahme einer Wandschicht allein ausreicht, die Beobachtungen mit der Theorie in Einklang zu bringen. Als geeignete Flüssigkeiten zur Untersuchung dieser Frage hatten sich Klauenfett und Alkohol ergeben, indem die Platten und Röhren, einmal vorbereitet, ihre gute Benetzbarkeit bewahrten, überhaupt diese Flüssigkeiten unter allen untersuchten die grösste Constanz zeigten.

Ich theile zuerst die Beobachtungen mit Klauenfett mit. Die endgültigen Beobachtungen wurden mit denselben Platten in drei verschiedenen Abständen und mit vier Röhren an sechs Tagen angestellt, derart, dass an jedem Tage, zu Anfang, Mitte und Ende der Beobachtung, die Steighöhe zwischen parallelen Platten, dazwischen die Steighöhe in allen vier Röhren, gemessen wurde. Durch Steigen wurde die Gleichgewichtslage

sehr bald erreicht, durch Fallen in 10 bis 20 Minuten, und zwar um so schneller, je grösser der Durchmesser war. Um eine Anschauung zu geben, wie schnell das Fallen des Meniscus vor sich ging, führe ich folgende Beobachtungen an:

	Plattenpaare.			Röhren.			
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	$2r$ = 1,956	1,519	1,138	2,895	2,354	2,129	1,380
0′	h = 3,50	4,68	6,35	4.61	5,86	6,51	10,43
5	3,49	4,63	6,29	4,575	5,80	6,485	10,34
10	3,49	4,62	6,27	4,56	5,78	6,475	10,32
15	—	4,61	6,26	4,56	5,78	6,465	10,31
20	—	4,61	6,25	—	—	6,465	10,30
25	—	—	6,24	—	—	—	10,30
30	—	—	6,24	—	—	—	—

Ich bemerke, dass bei der Bestimmung jeder Steighöhe das Fallen des Meniscus in dieser Weise beobachtet wurde. Ich theile nun die endgültig beobachteten Steighöhen sämmtlich mit, um zu zeigen, inwieweit die Constanz der Steighöhe erreicht war. Bei den Platten wurde die Gleichgewichtslage nur durch Fallen, bei den Röhren durch Fallen und Steigen erreicht; darauf beziehen sich die mit fallend und steigend überschriebenen Reihen. Die Temperatur war stets zwischen 19 und 21° C. Die bei den Plattenpaaren in einer Gruppe zusammengefassten Steighöhen sind an demselben Tage beobachtet. Ebenso entspricht bei den Röhren eine Horizontalreihe je einem Tage.

Plattenpaare.

$2r$ = 1,956 mm	$2r$ = 1,519 mm	$2r$ = 1,138 mm
h = 3,49	h = 4,60	h = 6,24
3,485	4,62	6,24
—	4,61	6,235
—	—	6,24
—	—	6,235
3,49	4,61	6,235
3,49	4,61	6,24
3,495	4,62	6,24
3,495	4,62	—
3,49 mm	4,61 mm	6,24 mm

Röhren.

$2r = 2{,}895$ mm		$2r = 2{,}354$ mm		$2r = 2{,}129$ mm		$2r = 1{,}380$ mm	
fallend	steigend	fallend	steigend	fallend	steigend	fallend	steigend
4,545	4,54	5,785	5,78	6,485	6,485	10,325	10,26
4,55	4,545	5,79	5,79	6,48 6,475	6,465 6,47	10,315	10,29
4,55	4,55	5,79	5,795	6,47	6,465	10,265	10,27
4,55	4,55	5,79	5,785	6,47	6,465	10,28	10,265
4,555	4,55	5,80	5,80	6,475	6,48	10,305	10,275
4,56	4,56	5,815	5,81	6,49	6,475	10,305	10,305
4,552	4,549	5,795	5,793	6,478	6,472	10,298	10,278
4,55 mm		*5,79 mm*		*6,475 mm*		*10,29 mm*	

Ich glaube, dass eine derartige Constanz der Steighöhen zwischen parallelen Platten und in Röhren den Beobachtungen einen grossen Grad der Zuverlässigkeit gewährt. Wie zu erwarten stand, ergibt sich infolge der Reibung die Steighöhe beim Steigen geringer als beim Fallen. Die Reibung ist ferner bei engen Röhren bedeutender als bei weiten. — Ich stelle nun die bei Klauenfett erhaltenen Resultate in einer Tabelle zusammen.

Plattenpaare.					Röhren.				
$2r$	h	a^2	δa^2	δa^2	$2r$	h	a^2	δa^2	δa^2
mm	mm		für $\delta r =$ 0,01	für $\delta h =$ 0,01	mm	mm		für $\delta r =$ 0,01	für $\delta h =$ 0,01
1,956	3,49	7,21	0,077	0,020	2,895	4,55	7,20	0,053	0,015
1,519	4,61	7,24	0,099	0,015	2,354	5,79	7,24	0,065	0,012
1,138	6,24	7,24	0,130	0,011	2,129	6,475	7,25	0,071	0,011
					1,380	10,29	7,25	0,108	0,007

Nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet sich hieraus bei Platten eine Wandschicht von 0,004 mm und die reducirte Constante zu 7,19; bei den Röhren berechnet sich die Wandschicht zu 0,007 mm und die reducirte Constante ebenfalls zu 7,19. Diese gefundene Abweichung der Dicke der Wandschicht bei Platten und Röhren ist aber nur eine scheinbare. Die Einstellung eines einzelnen Fadens im Mikroskop auf einen Doppeltheilstrich, wie es beim Messen der Dicken der Platten stattfand, und die Einstellung desselben Fadens als Tangente eines Kreises, wie es beim Messen der Röhren-

durchmesser stattfand, sind zu verschiedenartig, als dass sie mit einander in Uebereinstimmung zu bringen sind. Ich verfuhr beim Einstellen des Fadens als Tangente an den Röhrenquerschnitt derartig, dass ich auf den Punkt einstellte, in dem der helle Zwischenraum zwischen Faden und dunklem Querschnitt verschwand, wodurch offenbar der Durchmesser zu gross erhalten wurde, uud zwar nach den Beobachtungen um 0,006 mm (Genauigkeit des Mikroskops bis auf 0,002 mm).

Die folgende Tabelle zeigt in der That, dass die gefundene Abweichung der Wandschichten bei Platten und Röhren in der ausgeführten Weise ihre Erklärung findet; denn eine Zunahme der Wandschicht mit kleiner werdendem Röhrenquerschnitt ist nicht ersichtlich.

Platten.				Röhren.			
$2r$	a^2 (beobachtet)	a^2 (reducirt)	berechnete Wandschicht	$2r$	a^2 (beobachtet)	a^2 (reducirt)	berechnete Wandschicht
mm				mm			
1,956	7,21	7,18	0,003	2,825	7,20	7,16	0,002
1,519	7,24	7,20	0,005	2,354	7,24	7,20	0,008
1,138	7,24	7,19	0,004	2,129	7,25	7,20	0,008
				1,380	7,25	7,18	0,006

Ich komme zu den Beobachtungen mit Alkohol. Die Beobachtungen wurden mit denselben Platten in vier verschiedenen Abständen und mit sechs Röhren an sechs Tagen angestellt. Wieder wurde immer abwechselnd an Platten und Röhren beobachtet. Die Beobachtungen mit Alkohol waren insofern etwas schwieriger, als die Verdunstung das Niveau beständig änderte. Es wurde daher genau nach der Zeit von zwei zu zwei Minuten abwechselnd die Lage des Meniscus und des Niveaus gemessen. Das Niveau fiel durchschnittlich in vier Minuten um 0,05 mm durch Verdunstung, woraus dann der Stand des Niveaus zur Zeit der Beobachtung des Meniscus berechnet werden konnte. Die Reibung des Alkohols an Glas ist recht gering. Die Temperatur des Alkohols betrug 13 bis 15° C., das specifische Gewicht 0,810 bis 0,825. Ich theile wieder die beobachteten Steighöhen sämmtlich mit, um so mehr, da sich dieselben bei Alkohol mit geringerer Sicherheit ergaben, als bei Klauenfett. Jede einzelne Steighöhe ist

aus den während 15 Minuten abwechselnd an Meniscus und Niveau gemachten Ablesungen berechnet.

Plattenpaare.

$2r = 1{,}956$ mm		$2r = 1{,}519$ mm		$2r = 1{,}138$ mm		$2r = 0{,}438$ mm	
fallend	steigend	fallend	steigend	fallend	steigend	fallend	steigend
2,76	2,76	3,675	3,68	4,97	4,97	13,36	13,42
—	—	3,685	3,69	4,97	4,96	13,30	13,44
2,76	2,76	3,67	3,71	4,98	4,98	13,41	13,49
2,795	2,805	3,70	3,695	4,97	4,99	—	—
2,772	2,775	3,682	3,694	4,973	4,975	13,36	13,45
2,77 mm		3,69 mm		4,97 mm		13,405 mm	

Röhren.

$2r = 2{,}931$ mm		$2r = 2{,}349$ mm		$2r = 2{,}131$ mm	
fallend	steigend	fallend	steigend	fallend	steigend
3,56	3,57	4,61	4,61	5,16	5,15
3,55	3,59	4,59	4,60	5,17	5,18
3,53	3,54	4,59	4,59	5,20	5,16
3,58	3,58	4,61	4,625	5,18	5,17
3,60	3,60	4,63	4,665	5,13	5,14
3,564	3,576	4,606	4,618	5,168	5,16
3,57 mm		4,61 mm		5,16 mm	

$2r = 1{,}377$ mm		$2r = 1{,}006$ mm		$2r = 0{,}714$ mm	
fallend	steigend	fallend	steigend	fallend	steigend
8,29	8,32	11,48	11,52	16,41	16,45
8,32	8,30	11,51	11,52	16,40	16,46
8,31	8,30	11,56	11,58	16,56	16,54
8,32	8,33	11,54	11,52	16,48	16,47
8,36	8,36	11,58	11,54	16,37	16,53
8,32	8,322	11,534	11,536	16,44	16,49
8,32 mm		11,535 mm		16,465 mm	

Es mag auffallend erscheinen, dass die Steighöhe bei Alkohol, wenn sie durch Steigen erreicht wurde, einen grösseren Werth erhielt. Ich glaube diese Erscheinung aus der Eigenschaft des Alkohols, den Wassergehalt der Luft anzuziehen, erklären zu können: zuerst wurde nämlich immer die durch Fallen erreichte Gleichgewichtslage beobachtet. Die Platten und Röhren wurden dann eine Zeit lang in verticaler Lage in

der Luft gehalten, damit der Alkohol abtropfen konnte. Der kleine Rest Alkohol im Innern der Röhren und Platten zog nun etwas von dem Wassergehalt der Luft an. Beim capillaren Aufsteigen verdünnte sich so der Alkohol, und die Steighöhe musste grösser werden, indem die Capillaritätsconstante des Wassers grösser ist, als die des Alkohols. Ich stelle nun die bei Alkohol erhaltenen Resultate in einer Tabelle zusammen.

Plattenpaare.

$2r$	h	a^2	δa^2	δa^2
mm	mm		für $\delta r =$ 0,01	für $\delta h =$ 0,01
1,956	2,77	5,80	0,063	0,020
1,519	3,69	5,84	0,080	0,015
1,138	4,97	5,79	0,104	0,011
0,438	13,405	5,89	0,271	0,004

Röhren.

$2r$	h	a^2	δa^2	δa^2
mm	mm		für $\delta r =$ 0,01	für $\delta h =$ 0,01
2,931	3,57	5,83	0,043	0,015
2,349	4,61	5,83	0,053	0,012
2,131	5,16	5,845	0,058	0,011
1,377	8,32	5,88	0,088	0,007
1,006	11,535	5,885	0,119	0,005
0,714	16,465	5,92	0,165	0,004

Nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet sich hieraus bei Platten die Wandschicht zu 0,004 mm und die reducirte Constante zu 5,78; bei den Röhren die Wandschicht zu 0,007 mm und die reducirte Constante zu 5,80. Ich lege keinen Werth darauf, dass wir hier die Dicke der Wandschicht bei den Platten und Röhren genau so gross gefunden haben, wie bei Klauenfett; zumal die bei den Plattenpaaren erhaltenen Constanten nicht ganz regelmässig sich ergeben. Der als zu klein auffallende Werth $a^2 = 5{,}79$ erklärt wohl auch, dass sich die reducirte Constante bei Platten um 0,02 zu klein ergibt.

Ich füge auch hier eine Tabelle hinzu, aus der eine etwaige Zunahme der Wandschicht mit kleiner werdendem Röhrenquerschnitt nicht ersichtlich ist.

Platten.

$2r$	a^2 (beobachtet)	a^2 (reducirt)	berechnete Wandschicht
mm			
1,956	5,80	5,78	0,003
1,519	5,84	5,81	0,007
1,138	5,79	5,75	0,001
0,438	5,89	5,78	0,004

Röhren.

$2r$	a^2 (beobachtet)	a^2 (reducirt)	berechnete Wandschicht
mm			
2,931	5,83	5,80	0,007
2,349	5,83	5,79	0,006
2,131	5,845	5,80	0,008
1,377	5,88	5,82	0,009
1,006	5,885	5,80	0,007
0,714	5,92	5,80	0,007

Zur Vergleichung theile ich endlich noch von anderen Beobachtern gefundene Werthe der Capillaritätsconstanten von Alkohol mit.

Gay-Lussac	6,08.				
Hagen	5,83.				
Frankenheim [1])	5,83	spec. Gew.	0,810	Temp.	17° C.
Rodenbeck [2])	5,80	„	0,800	„	17,5
	6,09	„	0,840	„	17,5

Es ist zu bemerken, dass diese Werthe noch nicht unter der Annahme einer Wandschicht reducirt sind.

Ehe ich aus den gefundenen Resultaten Schlüsse ziehe, will ich einige Fehlerquellen, die von Einfluss auf meine Beobachtungen gewesen sein könnten, besprechen:

1) Die Temperatur. Brunner [3]) hat den Einfluss der Temperatur auf die Steighöhe beobachtet und gefunden, dass sich die Capillarhöhe bei 0° zu der bei 100° wie 1,230 : 1 verhält. Die grösste Temperaturdifferenz bei meinen Beobachtungen betrug 2°; dieses würde bei den kleineren Steighöhen eine Aenderung von 0,01 mm bedeuten. Nahm ich aus den Temperaturen, bei denen die Beobachtungen an ein und demselben Rohr oder an ein und derselben Platte angestellt waren, das Mittel, so ergab sich immer nahezu die gleiche mittlere Temperatur. Eine besondere Correction wegen der Temperatur anzubringen, erschien mir daher nicht erforderlich.

2) Der veränderliche Concentrationsgrad bei Alkohol. Der daraus entspringende Fehler wurde durch theilweise Herstellung des specifischen Gewichts und durch zweckmässige Aufeinanderfolge der Beobachtungen mit den jedesmaligen Platten und Röhren vermieden. Das Rohr, mit dem einmal zu Anfang beobachtet war, kam das andere Mal zum Schluss heran — zu Anfang war das specifische Gewicht kleiner, zum Schluss grösser. Es fiel somit auch dieser Fehler im Mittel heraus.

3) Die Theorie setzt unendlich lange parallele Platten voraus. Die von mir angewandten Platten waren circa 55 mm

1) Frankenheim, Pogg. Ann. **37.** p. 417. 1836.
2) Beibl. **4.** p. 105. 1880.
3) Brunner, Berl. Ber. p. 41. 1846.

lang. Diese Länge erwies sich aus Beobachtungen mit Klauenfett ausreichend. Es wurde nämlich bei Plattenpaaren in verschiedenen Abständen die Steighöhe bestimmt, einmal mit, das andere Mal ohne zu beiden Seiten angelegte Glasstreifen, sodass einmal der Längsschnitt durch die capillare Oberfläche eine concave, das andere mal eine convexe Curve gab. In der Steighöhe liess sich kein Unterschied nachweisen.

Eine Prüfung für die Ebenheit der Platten lieferten die Beobachtungen mit Klauenfett. Die Steighöhe wurde in der Mitte der Platte für eine Länge von ca. 10 mm völlig constant befunden. Nicht so constant zeigte sich für dieselbe Länge die Steighöhe bei Alkohol, eine Inconstanz, die jedenfalls in der Einwirkung des Wassergehalts der Luft auf verschiedene Stellen der Oberfläche ihren Grund hatte. Doch dieser Einfluss wird durch die grosse Anzahl der angestellten Beobachtungen herausgefallen sein. Zudem musste ja bei Alkohol der Verdunstung wegen immer abwechselnd auf Niveau und Meniscus eingestellt werden, sodass jedesmal der Wahrscheinlichkeit nach, an einer andern Stelle der Platte auf die Steighöhe eingestellt wurde.

4) Die Theorie setzt Röhren mit kreisförmigem Querschnitt voraus. Der Einfluss einer Abweichung von der kreisförmigen Gestalt lässt sich nicht theoretisch bestimmen. Streng genommen wird man nur Grenzen für die Capillaritätsconstante angeben können, indem man dieselben aus dem grössten und kleinsten Durchmesser berechnet. Ich habe den obigen Berechnungen den mittleren Durchmesser zu Grunde gelegt. Inwieweit meine Querschnitte von der Kreisform abwichen, ergibt sich aus den Differenzen der grössten und kleinsten beobachteten Durchmesser. Bezeichnen wir dieselben mit δ, so waren bei den Röhren von dem mittleren Durchmesser:

$2r$	δ	$2r$	δ
2,895 mm	0,051 mm	2,931 mm	0,066 mm
2,354	0,037	2,349	0,033
2,129	0,030	2,131	0,044
1,380	0,062	1,377	0,064
—	—	1,006	0,037
—	—	0,714	0,075

5) Die Abweichung der Röhren und Platten von der verticalen Lage. Es änderte sich dabei weniger die Capillarerhebung für sich, wohl aber schien durch die Brechung des Lichts in der schrägen Glaswand (3 bis 4 mm Dicke) die Steighöhe höher oder niedriger zu sein. Für kleine Winkel bestimmt sich die scheinbare Höhenänderung durch $\delta h = \frac{n-1}{n} \varphi \Delta$, worin n der Brechungsexponent, φ die Abweichung von der Verticalen, Δ die Dicke der Platte ist. In unserem Fall liefert die Abweichung von $^1/_2{}^0$ von der Verticalen einen Fehler von 0,01 mm in der Steighöhe.

6) Der Bemerkung in (5) entsprechend, ist es von Einfluss, dass auch die Axe des Mikroskopes sich in horizontaler Lage befindet. Es wurde das äussere Rohr des Mikroskopes mit Hülfe einer Libelle wagrecht gestellt. Am Ende der Beobachtungen erst zeigte sich, dass der Schnittpunkt des Fadenkreuzes nicht ganz genau mit der Axe des Mikroskopes zusammenfiel. Nachträglich liess sich aber nicht mehr feststellen, ob während der Beobachtungen der Schnittpunkt des Fadenkreuzes zur Seite, über oder unter die Axe gefallen war. Nur in den beiden letzten Fällen wäre eine Fehlerquelle vorhanden.

Rechnen wir alle Fehlerquellen zusammen, so dürften dieselben die berechneten Capillaritätsconstanten höchstens um 0,02 modificiren. Innerhalb dieser Grenzen ergibt sich aber nach den früheren Resultaten bei Klauenfett und Alkohol eine vollständige Uebereinstimmung der bei Platten und Röhren berechneten Constanten. Ein Einfluss der Krümmung der Wand lässt sich also innerhalb dieser Grenzen nicht nachweisen; die Annahme einer Wandschicht genügt schon allein, die Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung zu erklären. Die Annahme einer solchen Wandschicht aber rechtfertigen zunächst die Beobachtungen an Platten. Herr Prof. Voigt gab mir noch einen anderen Weg an, der die Zulässigkeit der Annahme einer Wandschicht prüfte. Er bestand darin, dass man die Röhren und Platten völlig in die zu untersuchende Flüssigkeit hineinlegte und dann abtropfen liess. Die Differenz der Gewichte der Röhren und Platten in feuchtem und trockenem Zustande gab eine obere Grenze für das Gewicht

und mithin auch für die Dicke der Wandschicht. War die aus den Capillaritätsbeobachtungen erhaltene Dicke der Wandschicht geringer, als die auf diesem Wege erhaltene, so war die Annahme gerechtfertigt, im anderen Falle nicht. Es bestimmte sich aus der Gewichtsdifferenz die Dicke der Wandschicht δ bei Alkohol (spec. Gew. = 0,82) zu 0,01 mm, bei Klauenfett ($s = 0{,}89$) zu 0,03 mm. Aus den Capillaritätsbeobachtungen ergab sich $\delta = 0{,}004$ mm; dieser Werth fällt unter die obere Grenze. Die Annahme einer Wandschicht ist also gerechtfertigt.

Die Methode, die Capillaritätsconstanten aus den Steighöhen in Röhren und zwischen parallelen Platten zu bestimmen, ist die genaueste, aber sie setzt die Kenntniss der Dicke der Wandschicht voraus. Herr Prof. Voigt machte mich noch auf eine andere Methode aufmerksam, welche zwar weniger genau ist, aber direct zum Ziele führt. Dieselbe besteht darin, dass die Coordinaten eines unter einem bestimmten Druck befindlichen liegenden oder hängenden Tropfens gemessen werden. Herr Prof. Voigt schlug mir vor, auch nach dieser Methode die Theorie einer Prüfung zu unterwerfen. Es war allerdings hier kein so grosser Spielraum der Krümmungen der Kuppen gegeben, wie er nach der frühern Methode durch Röhren und Platten erreicht wurde; doch entschloss ich mich, einige Beobachtungen anzustellen, schon um zu sehen, welche Genauigkeit sich auf diesem Wege gewinnen liess.

Der Beobachtungsapparat war folgender:

Ein am oberen Ende eben geschliffener Trichter war durch einen Schlauch mit einem Glasrohr verbunden, auf welches ein auf der Drehbank abgedrehter Konus von Messing mit einer inneren Durchbohrung aufgesetzt war. Indem nun das Flüssigkeitsniveau in dem Trichter die Spitze des Messingkonus überragte, bildete sich ein Tropfen. Es wurden, um verschieden grosse Tropfen zu erhalten, drei Konus mit Spitzen von 0,7 bis 2 mm Durchmesser angewendet. Die Coordinaten des Tropfens wurden durch ein Mikroskop mit Fadenkreuz, welches durch zwei aufeinander senkrechten Schrauben bewegt werden konnte, gemessen. Am Ende der Beobachtung wurde das Mikroskop durch die horizontale Schraube bis zur Mitte

des Trichters bewegt und durch die verticale Schraube mit Hülfe einer sich spiegelnden Nadel auf das Niveau eingestellt.

Wir gehen nun daran, eine theoretische Formel aufzustellen, nach der sich die Capillaritätsconstante aus den Coordinaten des Tropfens bestimmt. Die Behandlung des liegenden und hängenden Tropfens unterscheidet sich durch ein Vorzeichen. Es soll in dem Folgenden das obere Zeichen für den liegenden, das untere für den hängenden Tropfen gelten. Es ist:

$$h \pm z = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right).$$

Bezeichnen wir den Krümmungsradius an der Spitze des Tropfens $b = \frac{a^2}{h}$:

$$\frac{x^2}{b} \pm \frac{2}{a^2}\int z x \, dx = \frac{x z'}{\sqrt{1 + z'^2}}.$$

Wir beschränken uns auf die Nähe der Kuppe und versuchen, die Differentialgleichung durch eine Reihe nach steigenden Potenzen von $\frac{x}{b}$ zu integriren. Es bestimmt sich mit Vernachlässigung von $\left(\frac{x}{b}\right)^6$ gegen 1:

$$z = b\left\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\alpha\left(\frac{x}{b}\right)^4 + \tfrac{1}{6}\beta\left(\frac{x}{b}\right)^6\right\}.$$

Hierin bedeutet:

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{4}\frac{b^2}{a^2}, \qquad \beta = \tfrac{3}{8} \pm \tfrac{5}{12}\frac{b^2}{a^2} + \tfrac{1}{48}\frac{b^4}{a^4}.$$

Daraus folgt:

$$b = \frac{a^2}{h} = \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{z}\left\{1 + A\left(\frac{z}{x}\right)^2 + B\left(\frac{z}{x}\right)^4\right\}.$$

Hierin bedeutet:

$$A = 1 \pm \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{h^2}, \qquad B = \pm\tfrac{3}{8}\frac{a^2}{h^2} - \tfrac{7}{16}\frac{a^4}{h^4}.$$

Setzen wir in dem Gliede vierter Ordnung $\left(\frac{z}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{hz}{a^2}$, so erhalten wir die Endformel:

$$\frac{2a^2}{h}\left(z \mp \tfrac{1}{4}\frac{z^2}{h} + \tfrac{7}{72}\frac{z^3}{h^2}\right) = x^2 + z^2 \pm \tfrac{1}{3}\frac{z^3}{h}.$$

Der Einfluss eines Fehlers von h, x, z drückt sich, wenn wir uns auf das erste Glied beschränken, aus durch:

$$\delta a^2 = \frac{a^2}{h}\delta h, \quad \delta a^2 = 2\frac{a^2}{x}\delta x \quad \delta a^2 = -\frac{a^2}{z}\delta z.$$

Indem z die bei weitem kleinste Grösse ist, hat auch ein fehlerhaftes z den grössten Einfluss. Es wird daher das zweckmässigste sein, z von vornherein einzustellen und x zu messen. In der Regel wird man für eine ganze Reihe von verschiedenen z die zugehörigen x messen. Wir verfahren dann nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Zugrundelegung der Gleichung:

$$\frac{2a^2}{h}\left\{z \mp \tfrac{1}{4}\frac{z^2}{h} + \tfrac{7}{72}\frac{z^3}{h^2}\right\} - c = x^2 + z^2 \pm \tfrac{1}{9}\frac{z^3}{h}.$$

Hierin bedeutet c eine Constante, abhängig von der fehlerhaften Bestimmung des Nullpunktes von z multiplicirt mit $\frac{2a^2}{h}$.

Bei den Beobachtungen wandte ich Klauenfett an, weil dieses früher die grösste Constanz gezeigt hatte. Von den anderen Flüssigkeiten, mit denen ich die früheren Beobachtungen gemacht hatte, Alkohol und Wasser, sah ich von vornherein ab, weil sich der Einfluss der Verdunstung bei dem Arrangement des Versuches einer exacten Behandlung entzogen hätte.

Ich theile die Beobachtungen mit in Umgängen der bei diesen Versuchen vertical gerichteten Schraube. Es war:

ein Umgang der horizontalen Schraube = 1,412 der verticalen;
ein Umgang der verticalen Schraube = 0,3547 mm, also ein Umgang im Quadrat = 0,1258 qmm.

Endlich setzen wir noch zur Abkürzung $k = \frac{2a^2}{h}$.

Es wurden beim aufliegenden Tropfen folgende Werthe gefunden:

1) $h = 12{,}32$.

z	x		berechnet	Δ
0,2	1,31	$k \cdot 0{,}199 - c = 1{,}75$	1,70	+0,05
0,4	1,82	$k \cdot 0{,}397 - c = 3{,}48$	3,55	−0,07
0,6	2,23	$k \cdot 0{,}593 - c = 5{,}34$	5,37	−0,03
0,8	2,56	$k \cdot 0{,}787 - c = 7{,}21$	7,19	+0,02
1,0	2,83	$k \cdot 0{,}981 - c = 9{,}00$	9,00	±0,00

$$k = \frac{2a^2}{h} = 9{,}325 \quad c = 0{,}16$$

$$a^2 = 57{,}44 = 7{,}23 \text{ qmm}$$

2) $h = 15{,}41$.

z	x		berechnet	Δ
0,2	1,17	$k \cdot 0{,}199 - c = 1{,}40$	1,40	±0,00
0,4	1,66	$k \cdot 0{,}397 - c = 2{,}91$	2,91	±0,00
0,6	2,02	$k \cdot 0{,}594 - c = 4{,}44$	4,40	+0,04
0,8	2,29	$k \cdot 0{,}790 - c = 5{,}90$	5,92	−0,02
1,0	2,53	$k \cdot 0{,}984 - c = 7{,}40$	7,40	±0,00

$$k = \frac{2a^2}{h} = 7{,}635 \quad c = 0{,}12$$

$$a^2 = 58{,}83 = 7{,}40 \text{ qmm}$$

3) $h = 18{,}53$.

z	x		berechnet	Δ
0,2	1,11	$k \cdot 0{,}199 - c = 1{,}27$	1,26	+0,01
0,4	1,53	$k \cdot 0{,}398 - c = 2{,}51$	2,54	−0,03
0,6	1,86	$k \cdot 0{,}595 - c = 3{,}82$	3,81	+0,01
0,8	2,10	$k \cdot 0{,}791 - c = 5{,}04$	5,06	−0,02
1,0	2,30	$k \cdot 0{,}986 - c = 6{,}32$	6,32	±0,00

$$k = \frac{2a^2}{h} = 6{,}425 \quad c = 0{,}02$$

$$a^2 = 59{,}52 = 7{,}49 \text{ qmm}$$

4) $h = 24{,}10$.

z	x		berechnet	Δ
0,2	0,93	$k \cdot 0{,}200 - c = 0{,}91$	0,91	±0,00
0,4	1,29	$k \cdot 0{,}398 - c = 1{,}83$	1,83	±0,00
0,6	1,54	$k \cdot 0{,}596 - c = 2{,}72$	2,74	−0,02
0,8	1,74	$k \cdot 0{,}793 - c = 3{,}67$	3,65	+0,02
1,0	1,88	$k \cdot 0{,}990 - c = 4{,}54$	4,56	−0,02

$$k = \frac{2a^2}{h} = 4{,}61 \quad b = 0{,}01$$

$$a^2 = 55{,}55 = 6{,}99 \text{ qmm}$$

Es wurde nun der Trichter und das Rohr mit dem Konus umgestellt derart, dass auf die rechte Seite kam, was vorher auf der linken war. Es konnte so ein etwaiger Fehler in der horizontalen Stellung der horizontalen Schraube eliminirt werden. Es ergab sich analog wie vorhin:

$$h = 24{,}25 \qquad a^2 = 59{,}05 = 7{,}43 \text{ qmm}$$
$$14{,}38 \qquad 57{,}88 = 7{,}28$$

Die auf diesem Wege gefundenen Constanten a^2 für Klauenfett weichen nach beiden Seiten von dem früher gefundenen

Werth 7,19 ab. Ueberdies zeigt sich keine consequente Zu- oder Abnahme der Constanten mit wachsendem Druck. Es wird diese Unsicherheit in den Beobachtungen selbst liegen. Betrachten wir die Grösse Δ, die Differenz zwischen den beobachteten und berechneten Werthen, so könnte man mit diesen Abweichungen zufrieden sein, wenn man bedenkt, dass die Unsicherheit der horizontalen Einstellung des Fadenkreuzes auf ein so ungünstiges Object, wie es die der Kuppe benachbarten Stellen sind, ca. 0,01 Trommelumgang beträgt. Es reicht aber auch eine derartige fehlerhafte Einstellung nicht aus, die bedeutend voneinander abweichenden Constanten a^2 zu erklären. Wir werden vielmehr auch hier einen Einfluss der Reibung d. i. der Zähigkeit der Flüssigkeit anzunehmen haben, und zwar einen entsprechend bedeutenderen, als bei den früheren Beobachtungen.

Führen die Beobachtungen der letzten Art auch zu keinem erwünschten Abschluss, so widersprechen sie doch nicht den vorhin auf anderem Wege gewonnenen Resultaten, die ich nun noch einmal übersichtlich zusammenstelle:

1) Der von Wilhelmy gefundene Einfluss der Krümmung der Wand auf die Constanten der Capillarität ist nicht aufrecht zu erhalten, übrigens durch die Annahme einer fehlerhaften specifischen Gewichtsbestimmung erklärbar. Auch die Einstellung des Index auf den Strich ist angreifbar.

2) Die Beobachtung der Steighöhen zwischen parallelen Platten führt auf die Annahme einer constanten Wandschicht, an der die Flüssigkeit emporsteigt.

3) Die Dicke der Wandschicht bei Klauenfett und Alkohol ergibt sich constant für Platten und Röhren zu 0,004 mm.

4) Insofern man die bei Klauenfett und Alkohol gefundenen Resultate auf andere benetzende Flüssigkeiten ausdehnen darf, ist ein Einfluss der Krümmung der Wand auf die Capillaritätsconstanten bis auf 0,002 ihres Werthes nicht nachweisbar.

Die Beobachtungen wurden im physikalischen Institut des Hrn. Prof. Voigt ausgeführt, und sage ich meinem hochverehrten Lehrer meinen wärmsten Dank für die vielfache Anregung und Unterstützung bei der Arbeit.